Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

1[er] Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

8 de octubre de 2013

TEMA: **38**

1		2		3		4		5	Nota Final
1 p.	1 p.	1 p.	1.5 p.	1 p.	1.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	2 p.	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO MAXIMO: 120 MINUTOS

Ejercicio n° 1: Halle analíticamente y grafique el siguiente conjunto:

$$A = \{ z \in C \,/\, \operatorname{Re}[(z - 2j) \bullet \bar{z}] \le 3 \quad \wedge \quad z^5 - 32 = 0 \}$$

Ejercicio n° 2: Marque la respuesta correcta, y justifique:

2.1) El complejo $z = 2\, e^{j\pi/2} + (-1+j)^{10}$ es: a) imaginario puro positivo b) real positivo

c) imaginario puro negativo d) real negativo e) ninguno de los anteriores

2.2) La antitransformada de Laplace de $Y(s) = \dfrac{6s^2}{(s^2+9)^2}$ es: a) $y(t) = 6\cos^2(3t)$

b) $y(t) = \operatorname{sen}(3t) + 3\,t\cos(3t)$ c) $y(t) = 6\,t\cos(3t)$ d) $y(t) = 2\operatorname{sen}(3t) - 18\,t\operatorname{sen}(3t)$

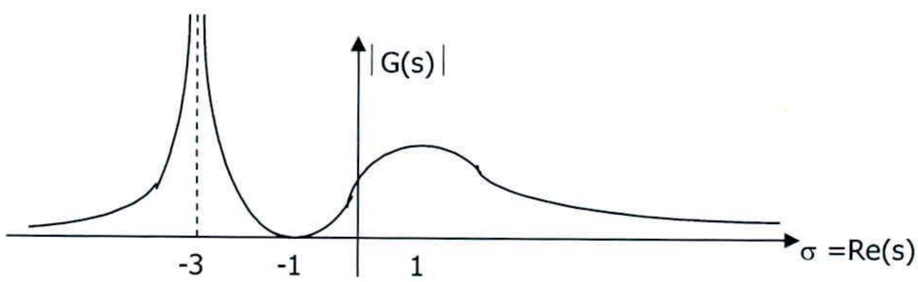
e) ninguna de las anteriores

Ejercicio n° 3: Dada $f(t) = \begin{cases} 5 & \text{si } -2 < t \le 2 \\ k & \text{si } 2 < t \le 4 \end{cases} \wedge f(t) = f(t+6)$

a) Halle el valor de $k \in R$ para que el valor medio de la señal dada sea 4 y grafique la función.

b) Con k=0, desarrolle f(t) en Serie Trigonométrica de Fourier.

Ejercicio n° 4: Sea una función de transferencia cuyo corte del módulo con el eje real es:



a) Halle G(s) sabiendo que tiene todos los polos simples, $|G(j)| = 3$ y $G(0) = 2$

b) Halle la respuesta del sistema a la entrada $f(t) = e^{-t}$

Ejercicio n° 5: Resuelva utilizando transformada Z:

$$x(n+1) - 4\,x(n) = 12 \bullet 4^n + 2 \bullet 5^n \qquad \text{con } x(0)=2$$

RESPUESTAS TEMA 38

Ejercicio 1:

a) Circulo centro (0;-1) radio 2.

b) De las 5 raíces solamente la w_3 y la w_4 pertenecen al círculo anterior.

Ejercicio 2:

2.1) Rta c (da -30 j)   2.2) Rta b

Ejercicio 3:

a) k = 2

b) $a_0/2 = 10/3$ $a_n = 10/n\pi \bullet \text{sen}(2n\pi/3)$ $b_n = 0$

Ejercicio 4:

a) $G(s) = \dfrac{30(s+1)}{(s^2-2s+5)(s+3)}$

b) $Y(s) = \dfrac{30(s+1)}{(s^2-2s+5)(s+3)} \bullet \dfrac{1}{s+1} = \dfrac{30}{(s^2-2s+5)(s+3)} = \dfrac{3/2}{s+3} + \dfrac{-3/2\,s+15/2}{(s-1)^2+4}$

$y(t) = 3/2\, e^{-3t} - 3/2 \cos(2t)\, e^{-t} + 3\, \text{sen}(2t)\, e^{-t}$

Ejercicio 5:

a) $X(z) = \dfrac{2z^3-4z^2-28z}{(s-4)^2(s-5)} \Rightarrow x(n) = 3\, n\, 4^n + 2\, 5^n$

tema 38

Mat. Sup 1° parcial 8-10-13

[EJ 1] Halle analíticamente y grafique el sig. conjunto:

$$A = \{ z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}[(z-2j).\bar{z}] \leq 3 \wedge z^5 - 32 = 0 \}$$

$z = a + bj$

• $\operatorname{Re}[(z-2j).\bar{z}] = \operatorname{Re}[(a+bj-2j)(a-bj)] = \operatorname{Re}[(a+(b-2)j)(a-bj)] =$

$= \operatorname{Re}[a^2 - abj + a(b-2)j + (b-2)b] = \boxed{a^2+b^2-2b \leq 3}$

$\boxed{a^2+(b-1)^2 \leq 4}$

• $z^5 = 32 = [32; 0]$ $\quad w_k = [2; \frac{2k\pi}{5}]$

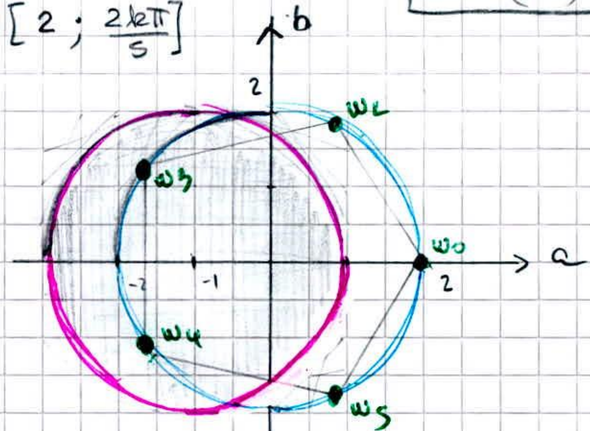
$w_0 = [2; 0]$

$w_1 = [2; \frac{2}{5}\pi]$

$w_2 = [2; \frac{4}{5}\pi]$

$w_3 = [2; \frac{6}{5}\pi]$

$w_4 = [2; \frac{8}{5}\pi]$



Los únicos dos raíces de $z^5 = 32$ que cumplen $a^2+(b-1)^2 \leq 4$ son w_3 y w_4

$$\boxed{z_1 = -1{,}62 + 1{,}176j \;;\; z_2 = -1{,}62 - 1{,}176j}$$

[EJ 2] Marque la respuesta correcta y justifique:

2.1) El complejo $z = 2e^{j\frac{\pi}{2}} + (-1+j)^{10}$ es:

a) imaginario puro positivo
b) real positivo
c) imag. puro negativo
d) ninguno de los anteriores

• $(-1+j)^{10} = [\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi]^{10} = [\sqrt{2}^{10}; 10 \times \frac{3}{4}\pi] = [32; \frac{15}{2}\pi] = [32; \frac{3}{2}\pi] = -32j$

2.2) La antitransformada de Laplace de $Y(s) = \frac{6s^2}{(s^2+9)^2}$ es:

~~a)~~ $y(t) = 6\cos^2(3t)$
b) $y(t) = \operatorname{sen}(3t) + 3t\cos(3t)$
c) $y(t) = 6t\cos(3t)$
d) $y(t) = 2\operatorname{sen}(3t) - 18t\operatorname{sen}(3t)$

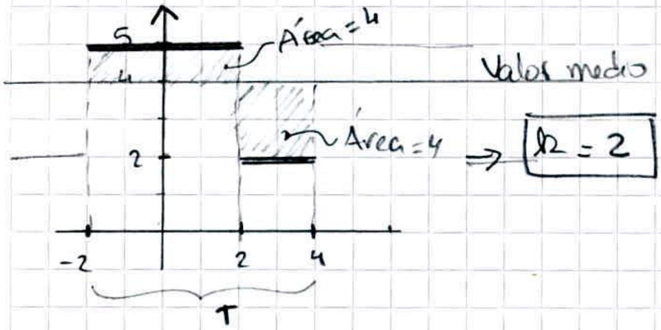
Me parece que es b) → transformo $y(t)$ y veo si es la $Y(s)$ dada.

$y(t) = \operatorname{sen}(3t) + 3t\,g(t) \rightarrow Y(s) = \frac{3}{s^2+9} + 3(-1)G'(s) = \frac{3}{s^2+9} - \frac{3(s^2+9)-6s^2}{(s^2+9)^2} = \frac{6s^2}{(s^2+9)^2}$

$G(s) = \frac{s}{s^2+9} \longrightarrow G'(s) = \frac{(s^2+9) - s\,2s}{(s^2+9)^2}$

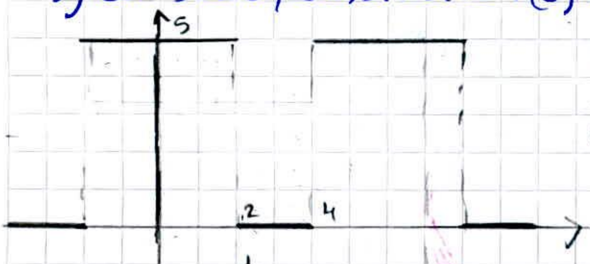
Ej 3 Dada $f(t) = \begin{cases} 5 & \text{si } -2 < t \leq 2 \\ k & \text{si } 2 < t \leq 4 \end{cases} \wedge f(t) = f(t+6)$

a) Hallar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el valor medio de la señal dada sea 4 y grafique la función.



$\Rightarrow \boxed{k = 2}$

b) Con $k=0$, desarrolle $f(t)$ en serie trigonométrica de Fourier



Es una función par $\rightarrow \boxed{b_n = 0}$

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} 5\, dt = \frac{10}{3}$

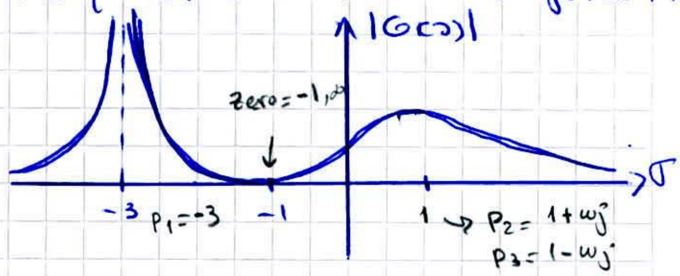
$T = 6$
$L = 3$
$\omega = \frac{\pi}{3}$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos(n\omega t)\, dt = \frac{1}{3}\cdot 2\int_0^2 5\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{3}t\right) dt =$$

$$= \frac{10}{3}\cdot\frac{\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{3}t\right)}{n\frac{\pi}{3}}\Bigg|_0^2 = \frac{10}{n\pi}\cdot\operatorname{sen}\left(n\,\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\boxed{S f(t) = \frac{10}{3} + \frac{10}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(n\frac{2}{3}\pi\right)}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{3}t\right)}$$

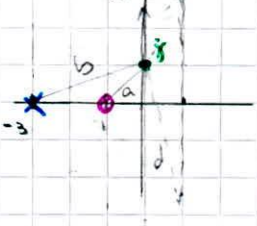
Ej 4 Sea una función de transferencia cuyo corte del módulo con eje real es:



a) Halle $G(s)$ sabiendo que tiene todos los polos simples, $|G(j)| = 3$ y $G(0) = 2$

$k \in \mathbb{R}$

$$G(s) = \frac{k\,(s+1)}{(s+3)\left[(s-1)^2+\omega^2\right]}$$



$$|G(j)| = \frac{k\cdot a}{b\cdot c\cdot d} = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{1+(\omega-1)^2}\,\sqrt{1+(\omega+1)^2}} = \frac{k}{\sqrt{5(\omega^4+4)}} = 3$$

$k = 3\sqrt{5(\omega^4+4)}$

$G(0) = 2 = \frac{k}{3(1+\omega^2)} \rightarrow \boxed{k = 6(1+\omega^2)}$

$3\sqrt{5(\omega^4+4)} = \underset{2}{6}(1+\omega^2)$

$5\omega^4 + 20 = 4(\omega^4 + 2\omega^2 + 1)$

$5\omega^4 + 20 = 4\omega^4 + 8\omega^2 + 4$

$\omega^4 - 8\omega^2 + 16 = 0 \rightarrow \omega^2 = 4$

$\omega = 2$

tema 38

8-10-13

$$G(s) = \frac{k(s+1)}{(s+3)[(s-1)^2+4]} \rightarrow G(0) = \frac{k}{3 \times 5} = 2 \rightarrow \boxed{k=30}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{30(s+1)}{(s+3)(s^2-2s+5)}}$$

b) Halle la respuesta del sistema a la entrada $f(t) = e^{-t}$ $\hookrightarrow F(s) = \frac{1}{s+1}$

$$Y(s) = G(s)\,F(s)$$

$$Y(s) = \frac{30\cancel{(s+1)}}{(s+3)(s^2-2s+5)} \cdot \frac{1}{\cancel{s+1}} = \frac{30}{(s+3)(s^2-2s+5)} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2-2s+5}$$

$$A(s^2-2s+5) + B(s^2+3s) + C(s+3) = 30$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -2A+3B+C = 0 \\ 5A+3C = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A = 3/2 \\ B = -3/2 \\ C = 15/2 \end{array} \rightarrow Y(s) = \frac{3/2}{s+3} + \frac{-\frac{3}{2}s + \frac{15}{2}}{(s-1)^2+4} =$$

$$= \frac{3/2}{s+3} + \frac{-\frac{3}{2}s + \frac{3}{2} + \frac{12}{2}}{(s-1)^2+4} =$$

$$= \frac{3/2}{s+3} - \frac{3}{2}\frac{(s-1)}{(s-1)^2+4} + 3 \cdot \frac{2}{(s-1)^2+4}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{t}\cos(2t) + 3e^{t}\,\mathrm{sen}(2t)}$$

EJ 5 Resuelva utilizando transformada Z:

$$x(n+1) - 4x(n) = 12 \times 4^n + 2 \times 5^n \qquad x(0) = 2$$

$$z[X(z) - x(0)] - 4X(z) = \frac{12z}{z-4} + \frac{2z}{z-5}$$

$$zX(z) - 2z - 4X(z) = \frac{12z^2 - 60z + 2z^2 - 8z}{(z-4)(z-5)} = \frac{14z^2 - 68z}{(z-4)(z-5)}$$

$$X(z)(z-4) = \frac{14z^2 - 68z}{z^2 - 9z + 20} + 2z \rightarrow X(z) = \frac{14z^2 - 68z + 2z^3 - 18z^2 + 40z}{(z-4)^2(z-5)}$$

$$X(z) = z\left[\frac{2z^2 - 4z - 28}{(z-4)^2(z-5)}\right] = z\left[\frac{A}{z-4} + \frac{B}{(z-4)^2} + \frac{C}{z-5}\right]$$

$$A(z^2 - 9z + 20) + B(z-5) + C(z^2 - 8z + 16) = 2z^2 - 4z - 28$$

$$\begin{cases} A + C = 2 \\ -9A + B - 8C = -4 \\ 20A - 5B + 16C = -28 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 12 \\ C = 2 \end{array} \rightarrow \boxed{X(z) = \frac{\overset{3 \times 4}{12z}}{(z-4)^2} + \frac{2}{z-5}} \rightarrow \boxed{x(n) = 3n4^n + 2 \times 5^n}$$